Integrazione di funzioni razionali

Per integrare le funzioni razionali fratte si utilizza, in genere, il metodo di decomposizione che, come già visto, si basa sulla possibilità di decomporre la funzione integranda nella somma di funzioni.

Se ci si trova a dover integrare

$$\int \frac{M(x)}{N(x)}dx$$

Se grado di $M(x)$ $\geq$ grado di $N(x)$ si esegue la divisione tra i polinomi:

$$M(x) = Q(x)\cdot N(x) + R(x) \quad \rightarrow \frac{M(x)}{N(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{N(x)} \quad \text{con} \quad Q(x) = quoziente\ , R(x) = resto$$

Se $N(x)$ si può scomporre, $\dfrac{M(x)}{N(x)}$ si decompone in somma del tipo

$$\frac{A_1}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_2}{(x-\alpha_2)} + \frac{A_3}{(x-\alpha_3)} + \ldots..$$

Se $N(x) = ax^2 + bx + c$ e

se $M(x) = 1$ si ha un integrale del tipo:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

Se Se $M(x) = px + q$ si ha:

$$\int \frac{px+q}{ax^2 + bx + c}dx$$

si calcola il Δ dell'equazione associata.

- **Se** $\Delta > 0$

  Si fattorizza $N(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, poi si cercano due numeri A e B applicando il principio di identità dei polinomi in modo tale che, in entrambe i casi si ha:

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{1}{a}\left[\frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)}\right]$$

  per cui l'integrale di partenza sarà del tipo:

$$\frac{1}{a}\left[\int \frac{A}{(x-x_1)}dx + \int \frac{B}{(x-x_2)}dx\right]$$

Ottenendo come integrale:

$$\frac{A}{a}\log|x-x_1|+\frac{B}{a}\log|x-x_2|+C$$

- Se $\Delta=0$

Si fattorizza $N(x)=a(x-x_1)^2$ e se $M(x)=1$ l'integrale è immediato se ricondotto al tipo

$$\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)dx=\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c$$

Se $M(x)=px+q$ si procede a scrivere mediante artifici *M(x)* come derivata del denominatore e con la decomposizione si ottengono 2 integrali del tipo:

$$\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{1}{f(x)}f'(x)dx+\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)dx=\ln f(x)+\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c$$

- Se $\Delta<0$

non è possibile scomporre il denominatore pertanto si ricorre ad artificio aggiungendo e sottraendo il coefficiente della *x* diviso per 2 ed elevato al quadrato e si riduce l'integrale del tipo:

$$\int\frac{1}{1+\left(f(x)\right)^{\alpha}}\cdot f'(x)dx=arctgf(x)+c$$

Se $M(x)=px+q$ ovvero si ha

$$\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$$

si procede a scrivere mediante artifici *M(x)* come derivata del denominatore e con la decomposizione si ottengono 2 integrali del tipo:

$$\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{1}{f(x)}f'(x)dx+\int\frac{1}{1+\left(g(x)\right)^2}\cdot g'(x)dx=\ln f(x)+arctg\left(g(x)\right)+c$$

Per capire vediamo degli esempi.

Esempi

1. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}$$

Calcoliamo il Δ:

$$\Delta = 9-8=1>0$$

Quindi scomponiamo in fattori primi il denominatore:

$$2x^2-3x+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)=(2x-1)(x-1)$$

Pertanto:

$$\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}=\int \frac{dx}{(2x-1)(x-1)}$$

Ricerchiamo ora due numeri A e B in modo tale che possiamo scrivere:

$$\frac{1}{(2x-1)(x-1)}=\frac{A}{(2x-1)}+\frac{B}{(x-1)}$$

$$\frac{A}{(2x-1)}+\frac{B}{(x-1)}=\frac{A(x-1)+B(2x-1)}{(2x-1)(x-1)}=\frac{Ax-A+2Bx-B}{(2x-1)(x-1)}=\frac{(A+2B)x+(-B-A)}{(2x-1)(x-1)}$$

Applichiamo il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ -A-B=1 \end{cases};\begin{cases} A=-2B \\ +2B-B=1 \end{cases};\begin{cases} A=-2 \\ B=1 \end{cases}$$

Quindi l'integrale di partenza si può scrivere come:

$$\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}=\int \frac{dx}{(2x-1)(x-1)}=\int \frac{-2}{(2x-1)}dx+\int \frac{1}{(x-1)}dx$$

i quali risultano essere 2 integrali immediati:

$$-\ln|2x-1|+\ln|x-1|+c$$

2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$$

Calcoliamo il Δ:

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$$

Quindi il denominatore si scompone in:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

e, grazie al principio di identità polinomiale si determinano le due costanti A e B tali che:

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x-(3A+2B)}{(x-2)(x-3)}$$

Applichiamo il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -(3A+2B)=1 \end{cases}; \begin{cases} A=1-B \\ -3(1-B)-2B=1 \end{cases}; \begin{cases} A=1-B \\ -3+3B-2B=1 \end{cases}$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} A=-3 \\ B=4 \end{cases}$$

e l'integrale diventa:

$$\int \frac{-3}{x-2}dx + \int \frac{4}{x-3}dx = -3\int \frac{1}{x-2}dx + 4\int \frac{1}{x-3}dx = -3\log|x-2| + 4\log|x-3| + c$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{25x^2-10x+1}$$

Calcoliamo il Δ:

$$\Delta = 100 - 100 = 0$$

Dunque il denominatore è un quadrato perfetto la cui scomposizione è: $25x^2-10x+1=(5x-1)^2$ pertanto l'integrale diviene:

$$\int \frac{dx}{25x^2-10x+1} = \int \frac{dx}{(5x-1)^2} = \int (5x-1)^{-2} dx = \frac{(5x-1)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{(5x-1)} + c$$

4. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{3x-1}{4x^2+4x+1}dx$$

Si scompone $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$ e, grazie al principio di identità polinomiale, si determinano le due costanti A e B tali che:

$$\frac{3x-1}{4x^2+4x+1}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{(2x+1)^2}=\frac{A(2x+1)+B}{(2x+1)^2}=\frac{2Ax+A+B}{(2x+1)^2}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} A=\dfrac{3}{2} \\ B=-\dfrac{5}{2} \end{cases};\begin{cases} 2A=3 \\ A+B=-1 \end{cases}$$

e l'integrale diventa:

$$\frac{3}{2}\int\frac{1}{2x+1}dx-\frac{5}{2}\int\frac{1}{(2x+1)^2}dx=\frac{3}{4}\int\frac{2}{2x+1}dx-\frac{5}{4}\int\frac{2}{(2x+1)^2}dx=\frac{3}{4}\log|2x+1|+\frac{5}{4(2x+1)}+C$$

5. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+5}$$

Calcoliamo il Δ:

$$\Delta = 9 - 20 < 0$$

Aggiungiamo e sottraendo il coefficiente della *x* diviso per 2 ed elevato al quadrato ovvero

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

In modo tale da avere un quadrato di binomio:

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+\frac{9}{4}+5-\frac{9}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)+\left(5-\frac{9}{4}\right)} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} = \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{(2x+3)^2}{4}+\frac{11}{4}} = \int \frac{4}{(2x+3)^2+11}dx$$

Dividiamo per 11 al numeratore e denominatore:

$$= \int \frac{\frac{4}{11}}{\frac{(2x+3)^2}{11}+\frac{11}{11}}dx = \int \frac{\frac{4}{11}}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right)^2+1}dx$$

Ci serve la derivata della funzione $\frac{2x+3}{\sqrt{11}}$ per avere un integrale immediato del tipo

$$\int \frac{1}{1+\left(f(x)\right)^2} \cdot f'(x)dx = arctg\left(f(x)\right)+c$$

pertanto scriviamo:

$$= \int \frac{\frac{2}{\sqrt{11}} \cdot \frac{2}{\sqrt{11}}}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right)^2+1}dx = \frac{2}{\sqrt{11}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{11}}}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right)^2+1}dx = \frac{2}{\sqrt{11}} arctg \frac{2x+3}{\sqrt{11}} + c$$

6. Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+7}dx$$

Si riscrive la frazione come somma di frazioni, in modo che una di esse abbia come numeratore la derivata del denominatore

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+7}dx = \int \frac{2x+4-4+1}{x^2+4x+7}dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx - \int \frac{3}{x^2+4x+7}dx =$$

Il primo integrale è immediato, mentre nel secondo si scrive il denominatore come somma di due quadrati per poter integrare come arcotangente:

$$x^2+4x+7 = \left(x^2+4x+4\right)-4+7 = \left(x+2\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2$$

l'integrale di partenza diventa:

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx - 3\int \frac{1}{\left(x+2\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx = \log\left(x^2+4x+7\right) - 3\int \frac{1}{\left(x+2\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx =$$

$$= \log\left(x^2+4x+7\right) - 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{x+2}{\sqrt{3}} + C = \log\left(x^2+4x+7\right) - \sqrt{3} arctg\frac{x+2}{\sqrt{3}} + C$$